

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Расчет двухшарнирных арок на статические нагрузки

Методические указания
по дисциплине “Строительная механика”

для студентов специальности

70 02 01 “Промышленное и гражданское строительство”

Брест 2003

УДК 624.04

В методических указаниях изложены основы расчета двухшарнирных арок на действие статических внешних нагрузок. Представлены общие принципы расчета, рассмотрены расчеты с использованием непосредственного интегрирования, численного интегрирования и с использованием учебной компьютерной программы “Arka2”; приведены примеры расчетов.

Методические указания предназначены для студентов специальности 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения; могут использоваться в самостоятельной работе при изучении курса строительной механики, при выполнении расчетно-проектировочных заданий и курсовой работы по строительной механике.

Составитель – В.И. ИГНАТЮК, доцент, канд. техн. наук

Рецензент: заместитель директора Республиканского унитарного научно-исследовательского и опытно-конструкторского предприятия “Научно-технический центр”, канд. техн. наук В.Н. ДЕРКАЧ

© Учреждение образования

«Брестский государственный технический университет» 2003

1. Общие понятия и подходы к расчету

Двухшарнирной аркой называется статически неопределимая распорная система, имеющая вид кривого бруса, опирающегося по концам шарнирно (рис. 1а). Одна из горизонтальных связей такой арки может быть преобразована в затяжку, и тогда будем иметь двухшарнирную арку с затяжкой (рис. 1б).

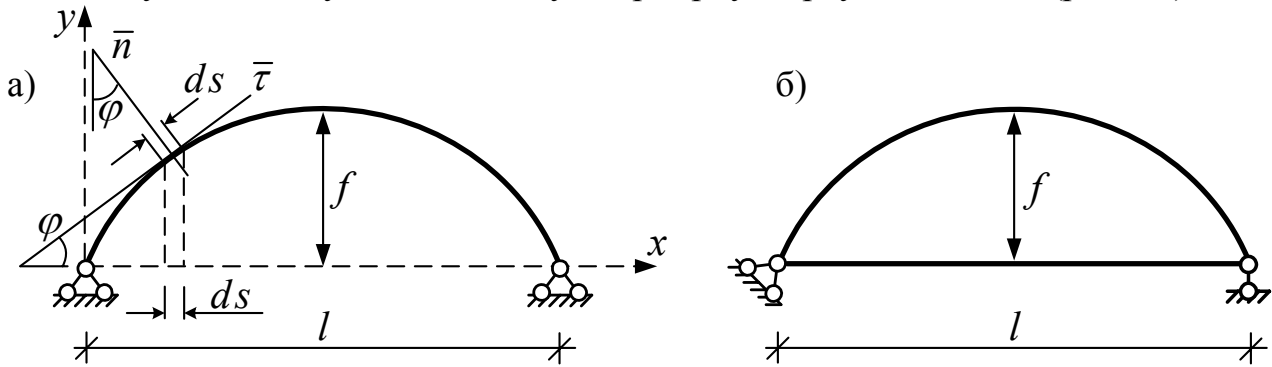


Рис. 1

Форма арок определяется законами изменения оси криволинейного стержня и изменения размеров поперечного сечения вдоль оси, которые назначаются при проектировании исходя из различных соображений – архитектурных, функциональных, соображений рациональности и т. д. Заметим, что арки чаще всего выполняются симметричными, и поэтому здесь далее будем рассматривать только симметричные арки. Оси арок могут изменяться по круговому, параболическому, синусоидальному и другим законам, а поперечное сечение может быть как постоянным по длине, так и переменным. Для двухшарнирных арок часто используется, например, закон изменения поперечного сечения, характеризующийся зависимостью $J = J_o \cos \varphi$, где: J – момент инерции произвольного сечения арки; J_o – момент инерции среднего ($x = l/2$) сечения арки; φ – угол между касательной $\bar{\tau}$ к оси арки в рассматриваемом сечении и осью x (рис.1) (или угол, образуемый нормалью \bar{n} к оси арки и осью y); l – пролет (расстояние между опорами) арки.

Поскольку арки представляют собой криволинейные стержни, поперечные сечения которых могут изменяться по их длине, то для расчета арок удобнее всего применять метод сил. При этом и в методе сил будут возникать сложности, так как в силу указанных факторов при вычислении коэффициентов канонических уравнений метода сил по формулам Мора нельзя применить правило Верещагина, формулы Симпсона и трапеций. Непосредственное интегрирование в формулах Мора здесь в большинстве случаев также будет очень сложным, поэтому чаще всего в расчетах арок для вычисления интегралов Мора, ис-

пользуют приближенные способы, заменяя интегрирование численным суммированием. Учитывая, что по физическому смыслу интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной функцией $f(x)$,

осью x и вертикальными линиями $x=a$ и $x=b$, при замене интегрирования численным суммированием площадь A этой фигуры представляется, как сумма площадей ΔA_i отдельных фигур, которые получаются при разбивке участка интегрирования на малые участки Δx_i обычно равной длины (Δx) – см. рис. 2.

При этом каждую из полученных малых фигур можно представить в виде трапеции, если заменить кривую $f(x)$ на участке Δx прямой, и в этом случае

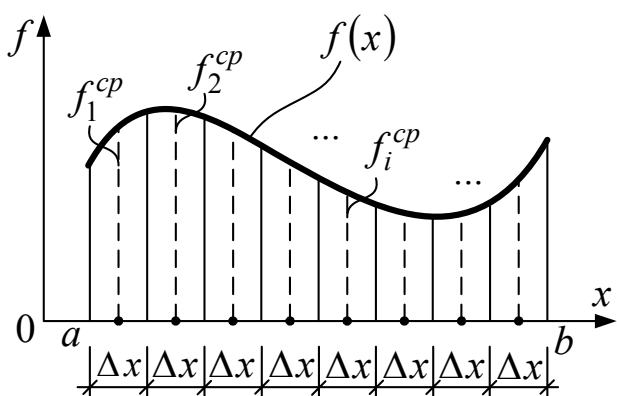


Рис. 2

площадь этих фигур может быть вычислена по формуле площади трапеций

$$\Delta A_i = f_i^{\tilde{\delta}} \Delta \delta,$$

где f_i^{cp} – значение подынтегральной функции $f(x)$ в средней точке i -того участка.

Полная площадь фигуры или величина рассматриваемого интеграла тогда будут равны

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f_i^{cp} \Delta x = \left(\sum_{i=1}^n f_i^{cp} \right) \Delta x, \quad (1)$$

где n – число частей, на которые разбивается участок интегрирования.

Чем на большее число частей разбить участок интегрирования, тем меньше будет величина Δx и тем выше будет точность численного вычисления интеграла.

Интегрирование при расчете арок должно выполняться по кривой s вдоль оси арки, что также неудобно, поэтому обычно переходят к интегрированию по оси x , выразив длину элементарной дуги ds через длину соответствующего горизонтального участка (рис. 1) с помощью зависимости

$$dx = ds \cdot \cos \varphi, \quad \text{или} \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi}. \quad (2)$$

Следует отметить, что влияние поперечных и продольных сил на перемещения и усилия в арках, как правило, больше, чем в рамах, и часто может быть существенным. Поэтому расчетные зависимости в общем случае далее получим с учетом поперечных и продольных сил.

2. Принципы расчета двухшарнирных арок методом сил

Степень статической неопределимости двухшарнирных арок, как видно из представленных вычислений для обычной арки (рис. 1а)

$$L = -(3D - 2Ш - C_o) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4) = 1$$

и для двухшарнирной арки с затяжкой (рис. 1б)

$$L = (3D - 2Ш - C_o) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3) = 1,$$

равна единице. Таким образом, при выборе основной системы (О.С.) метода сил необходимо отбросить одну лишнюю связь, что здесь целесообразно сделать путем удаления одной из горизонтальных опорных связей в обычной двухшарнирной арке (рис. 1а) либо путем разрезания затяжки в двухшарнирной арке с затяжкой (рис. 1б). Следует заметить, что обычная двухшарнирная арка является частным случаем арки с затяжкой и получается из нее при принятии величины жесткости затяжки, равной бесконечности ($EA_{зат} = \infty$). Потому далее будем рассматривать более общий случай – арку с затяжкой (рис. 3а).

Основная система метода сил будет иметь вид, представленный на рис. 3б, а каноническое уравнение метода сил запишется в виде

$$\delta_{11} \check{O}_1 + \Delta_{1D} = 0; \quad (3)$$

где: δ_{11} – взаимное расхождение по горизонтали сечений затяжки в месте ее разреза от действия сил X_1 , равных по единице;

Δ_{1P} – взаимное расхождение по горизонтали сечений в затяжке в месте ее разреза от действия на арку заданных внешних нагрузок.

Перемещения δ_{11} и Δ_{1P} в общем случае (с учетом поперечных и продольных сил) определяются по формулам Мора вида

$$\delta_{11} = \int_0^S \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \int_0^S \eta \frac{\bar{Q}_1^2 ds}{GA} + \int_0^S \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EA} + \int_0^l \frac{(\bar{N}_1^{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}})^2 dx}{EA_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}}}; \quad (4)$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^S \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ} + \int_0^S \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P dx}{GA} + \int_0^S \frac{\bar{N}_1 N_P dx}{EA}, \quad (5)$$

где: EJ , GA , EA – жесткости арки соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии;

η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения равен 1,2);

$\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$ – законы изменения единичных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от действия единичного значения неизвестного метода сил, то есть от действия силы X_1 , равной единице;

$\bar{N}_1^{\zeta\dot{\alpha}\dot{\alpha}}$ – закон изменения эпюры N в затяжке от действия $X_1=1$;

M_P, Q_P, N_P – законы изменения эпюр M, Q и N в арке от действия внешних нагрузок.

Единичные эпюры $\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1, \bar{N}_1^{\zeta\dot{\alpha}\dot{\alpha}}$ для рассматриваемой арки в общем виде представлены на рис. 3в÷3е, а законы их изменения имеют вид

$$\bar{M}_{1x} = -y_x; \quad \bar{Q}_{1x} = -\sin \varphi_x; \quad \bar{N}_{1x} = -\cos \varphi_x; \quad \bar{N}_1^{\zeta\dot{\alpha}\dot{\alpha}} = 1. \quad (6)$$

Эпюры же M_P, Q_P и N_P в О.С. часто удобно выразить через так называемые балочные эпюры \dot{I}^i_D и Q_P^o , то есть эпюры усилий, построенные в простой двухопорной балке, имеющей пролет, равный пролету арки, и загруженной такой же внешней нагрузкой; при этом балочные эпюры обычно строятся от вертикальных нагрузок – при наличии других нагрузок их следует учитывать дополнительно (см., например, расчет арки в разделе 4). При действии только вертикальных нагрузок (рис. 3а) эпюра M_P в О.С. метода сил будет равна балочной эпюре M_P^o (рис. 4). Балочные эпюры M_P^o, Q_P^o для рассматриваемой арки в общем случае могут иметь вид, представленный на рис. 4. Эпюры поперечных и продольных сил в О.С. метода сил арки Q_P и N_P выражаются через балочную эпюру Q_P^o с помощью соотношений

$$Q_P = Q_P^o \cos \varphi; \quad N_P = -Q_P^o \sin \varphi. \quad (7)$$

Возможный вид этих эпюр показан на рис. 4.

Подставляя полученные законы изменения единичных и грузовых эпюр в (4) и (5), и рассматривая интегрирование по x с учетом (2), выражения для перемещений δ_{11} и Δ_{1P} получим в виде

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{y^2 dx}{EJ \cos \varphi} + \int_0^l \eta \frac{\sin^2 \varphi dx}{GA \cos \varphi} + \int_0^l \frac{\cos \varphi dx}{EA} + \frac{l}{EA_{\zeta\dot{\alpha}\dot{\alpha}}}; \quad (8)$$

$$\Delta_{1P} = -\int_0^l \frac{y \dot{I}^i_P dx}{EJ \cos \varphi} - \int_0^l \eta \frac{\sin \varphi Q_P dx}{GA \cos \varphi} - \int_0^l \frac{N_P dx}{EA}. \quad (9)$$

При учете в расчете только изгибающих моментов вторые и третьи слагаемые в этих выражениях, учитывающие влияние поперечных и продольных сил, отбрасываются.

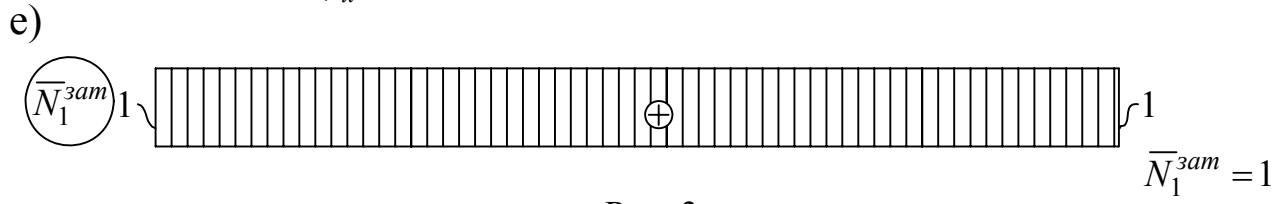
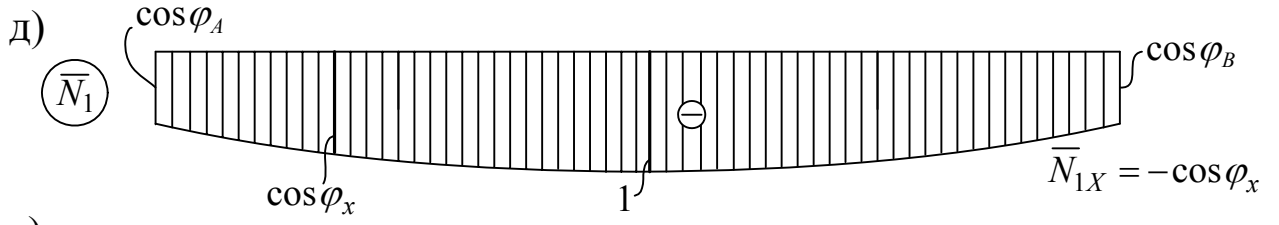
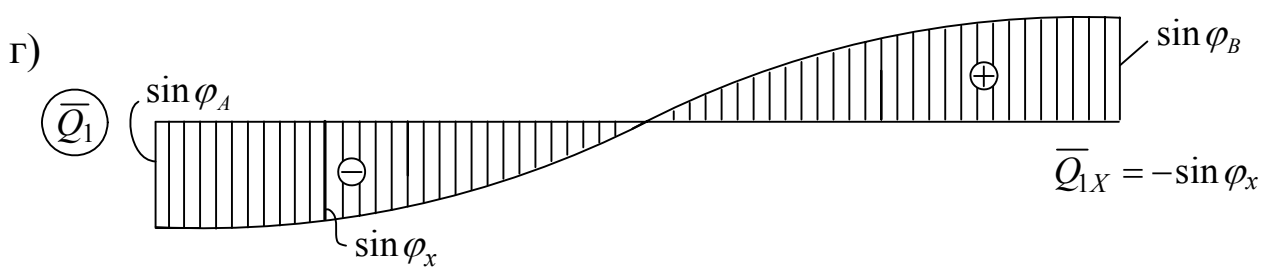
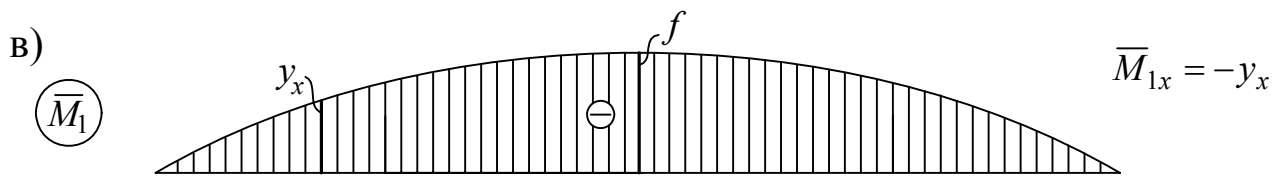
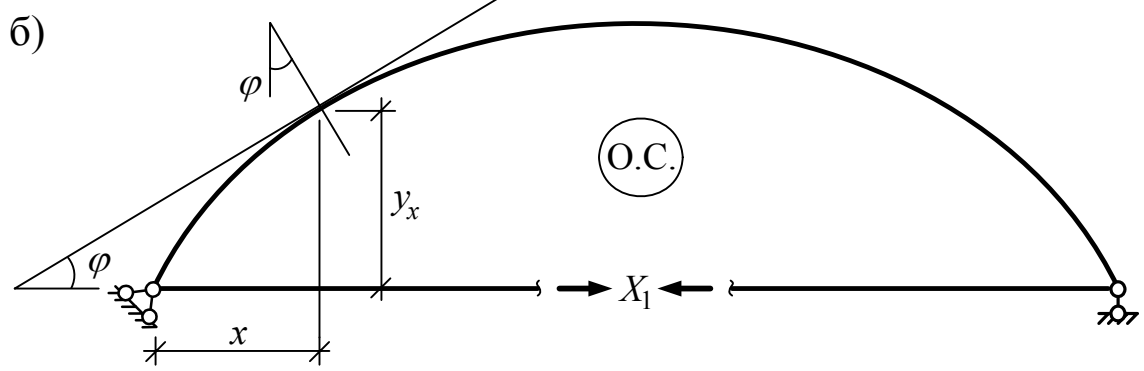
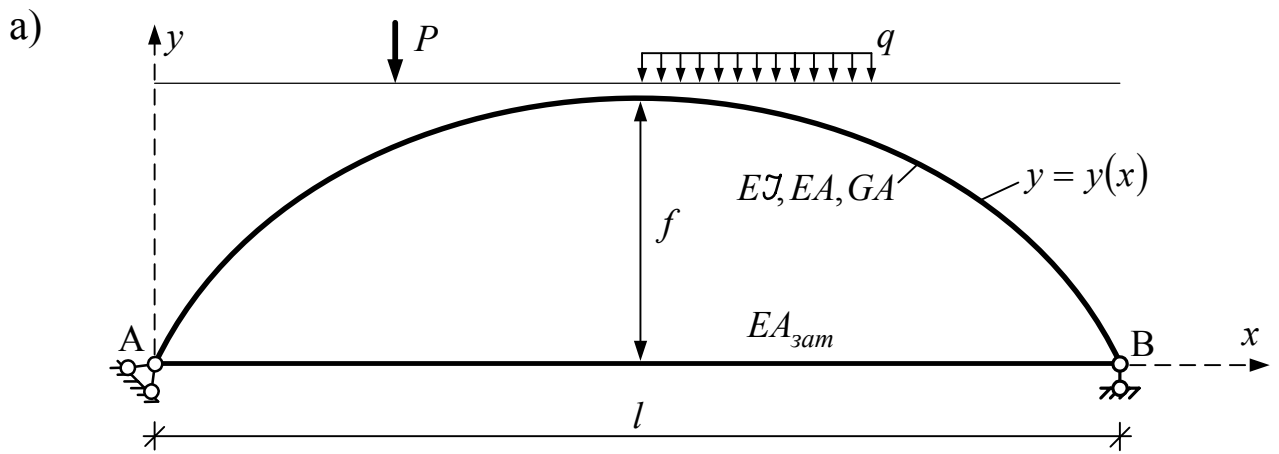


Рис. 3

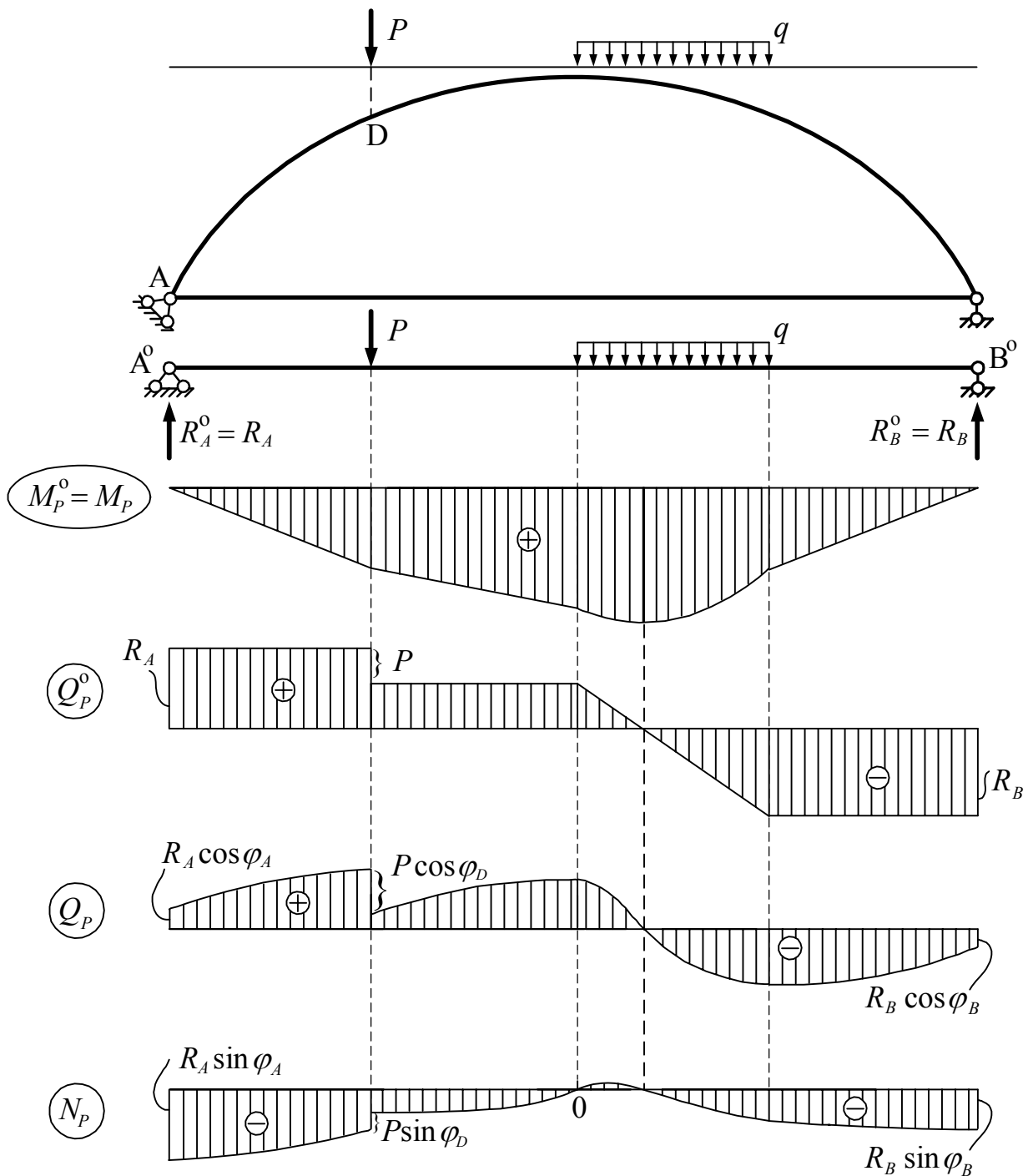


Рис. 4

Вычислив перемещения δ_{11} и Δ_{1P} , решаем уравнение (3) и находим неизвестное метода сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (10)$$

После этого можно построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в заданной статически неопределимой арке по формулам

$$\begin{aligned} M &= \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -yX_1 + M_P; \\ Q &= \bar{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin \varphi X_1 + Q_P; \end{aligned} \quad (11)$$

$$N = \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos \varphi X_1 + N_P ;$$

$$N^{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}} = \bar{N}_1^{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}} \cdot X_1 = 1 \cdot X_1 = X_1 .$$

Деформационная проверка в общем случае учета всех видов усилий выполняется по формуле

$$\begin{aligned} & \int_0^s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} + \int_0^s \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P ds}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1 N_P ds}{EA} + \int_0^l \frac{\bar{N}_1^{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}} N^{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}} dx}{EA_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}}} = \\ & = -\int_0^l \frac{y M dx}{EJ \cos \varphi} - \int_0^l \eta \frac{\sin \varphi Q dx}{GA \cos \varphi} - \int_0^l \frac{N dx}{EA} + \frac{X_1 l}{EA_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}}} = 0 , \end{aligned} \quad (12)$$

При неучете поперечных и продольных сил второе и третье слагаемые здесь опускаются.

3. Расчет двухшарнирной арки с использованием непосредственного интегрирования

Рассмотрим круговую двухшарнирную арку, изображенную на рис. 5, ось которой представляет собой половину окружности радиусом $r=4m$. Расчет арки будем выполнять без учета влияния на перемещения поперечных и продольных сил. Арка имеет одну лишнюю связь и основная система метода сил для нее представлена на рис. 6, а каноническое уравнение метода сил запишется в виде

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13)$$

Единичная эпюра изгибающих моментов в О.С. изображена также на рис. 6, а закон изменения ее определяется выражением

$$\bar{I}_{1x} = -y. \quad (14)$$

Грузовая эпюра изгибающих моментов M_P (рис. 7) строится как в простой двухопорной балке. При этом на этой эпюре будем иметь три участка – AC (1-ый), CD (2-ой) и DB (3-ий), на которых законы изменения эпюры M_P будут разными:

– **участок AC :** (закон изменения на всех участках находится из рассмотрения левой части арки относительно произвольного на участке сечения x):

$$M_{Px}^{(1)} = 17,5 \cdot x - (5 \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = 17,5x - 2,5x^2 ; \quad (15)$$

– **участок CD :** $M_{Px}^{(2)} = 17,5 \cdot x - (5 \cdot 4)(x - 2) = 40 - 2,5x ;$

– **участок DB :** $M_{Px}^{(3)} = 17,5 \cdot x - (5 \cdot 4)(x - 2) - 10(x - 6) = 100 - 12,5x.$

Подставляя выражения (14), (15) в (8) и (9), и учитывая только изгибающие моменты, а также отсутствие в рассматриваемой арке затяжки и то, что $EJ = const$, выражения для единичного и грузового перемещений δ_{11} и Δ_{1P} получим в виде

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{y^2}{\cos \varphi} ; \quad (16)$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ} \left[\int_0^4 \frac{y(17,5x - 2,5x^2)dx}{\cos \varphi} + \int_4^6 \frac{y(40 - 2,5x)dx}{\cos \varphi} + \int_6^8 \frac{y(100 - 12,5x)dx}{\cos \varphi} \right]. \quad (17)$$

Вычисление этих интегралов в представленном виде сложно, тем более, что вместо y еще следует подставить закон изменения оси рассматриваемой арки, имеющий вид

$$y = \sqrt{x(2r - x)} = \sqrt{x(8 - x)}. \quad (18)$$

Учитывая, что арка является круговой и ось ее представляет часть окружности (в данном случае половину окружности), для упрощения вычисления представленных интегралов здесь можно и целесообразно перейти к полярной системе координат с центром в точке O и началом отсчета угла, например, от оси x (см. рис. 6). Зависимость между рассматриваемыми декартовой и полярной системами координат будет определяться выражениями

$$x = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta) = 4(1 - \cos \theta); \quad y = r \sin \theta = 4 \sin \theta; \quad (9)$$

$$dx = ds \cos \varphi = r \cos \varphi d\theta \quad \text{или} \quad \frac{dx}{\cos \varphi} = ds = r d\theta = 4d\theta.$$

Подставляя эти соотношения в (16) и (17) и выполняя интегрирование полученных зависимостей, получим значения коэффициента и свободного члена уравнения метода сил

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^\pi y^2 \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{1}{EJ} \int_0^\pi (r \sin \theta)^2 r d\theta = \frac{r^3}{EJ} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{r^3}{EJ} \left(\frac{1}{2} \theta \Big|_0^\pi - 0 \right) = \frac{\pi r^3}{2EJ};$$

$$= \frac{r^3}{EJ} \left(\frac{1}{2} \theta \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi r^3}{2EJ} = \frac{\pi \cdot 4^3}{2EJ} = \frac{100,531}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \theta \cdot [17,5 \cdot 4 \cdot (1 - \cos \theta) - 2,5 \cdot 16(1 - \cos \theta)^2] \cdot 4d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} 4 \sin \theta [40 - 2,5 \cdot 4 \cdot (1 - \cos \theta)] \cdot 4d\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} 4 \sin \theta [100 - 12,5 \cdot 4 \cdot (1 - \cos \theta)] \cdot 4d\theta \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{EJ} \left\{ 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [70(1 - \cos\theta) - 40(1 - \cos\theta)^2] d(1 - \cos\theta) - 16 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} (30 + 10\cos\theta) d(\cos\theta) - \right. \\
&\quad \left. - 16 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (50 + 50\cos\theta) d(\cos\theta) = -\frac{16}{EJ} \left[70 \frac{(1 - \cos\theta)^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 40 \frac{(1 - \cos\theta)^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 30 \cos\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} - 10 \frac{\cos^2\theta}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} - 50 \cos\theta \Big|_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} - 50 \frac{\cos^2\theta}{2} \Big|_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \right] \right\} = \\
&= -\frac{16}{EJ} \left[70 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - 40 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) - 30 \left(-\frac{1}{2} - 0 \right) - 5 \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - 50 \left(-1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{50}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right] = \\
&= -\frac{666,667}{EJ}.
\end{aligned}$$

Решая теперь уравнение (12), найдем неизвестное метода сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-666,667}{100,531} = 6,6315 \text{ (кН)}.$$

Ординаты окончательных эпюр M , Q и N в итоге можно вычислить согласно (11) по выражениям:

$$\begin{aligned}
\text{– участок } AC: \quad M_x^{(1)} &= -yX_1 + M_{Px}^{(1)} = -4\sin\theta \cdot 6,6315 + 17,5 \cdot 4(1 - \cos\theta) = \\
&= 2,5 \cdot 16(1 - \cos\theta)^2 = 30 - 26,526\sin\theta + 10\cos\theta - 40\cos^2\theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{– участок } CD: \quad M_x^{(2)} &= -yX_1 + M_{Px}^{(2)} = -4\sin\theta \cdot 6,6315 + 40 - 2,5 \cdot 4(1 - \cos\theta) = \\
&= 30 - 26,526\sin\theta + 10\cos\theta; \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{– участок } DB: \quad M_x^{(3)} &= -yX_1 + M_{Px}^{(3)} = -4\sin\theta \cdot 6,6315 + 100 - 12,5 \cdot 4(1 - \cos\theta) = \\
&= 50 - 26,526\sin\theta + 50\cos\theta;
\end{aligned}$$

где значения синуса и косинуса угла θ через ординату x можно вычислить по соотношениям $\cos\theta = 1 - \frac{x}{4}$; $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$. (21)

Эпюра изгибающих моментов, построенная по полученным зависимостям, представлена на рис. 5.

Эпюры поперечных и продольных сил построим в соответствии с зависимостями (11) с учетом того, что $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ и $\sin\varphi = \cos\theta$, а $\cos\varphi = \sin\theta$;

$$Q_{Px} = Q_{Px}^0 \cdot \cos\varphi; \quad N_{Px} = -Q_{Px}^0 \cdot \sin\varphi,$$

где: $Q_{Px}^{0(1)} = 17,5 - 5x$; $Q_{Px}^{0(2)} = -2,5$; $Q_{Px}^{0(3)} = -12,5$;

в результате зависимости на участках AC , CD и DB для поперечных и продольных сил получим в виде:

$$Q_{Px}^{(1)} = -\sin \varphi \cdot X_1 + Q_{Px}^{(1)} = -X_1 \cos \theta + [17,5 - 5 \cdot 4(1 - \cos \theta)] \sin \theta = \\ = -6,6315 \cos \theta - 2,5 \sin \theta + 20 \sin \theta \cos \theta ;$$

$$Q_{Px}^{(2)} = -\sin \varphi \cdot X_1 + Q_{Px}^{(2)} = -6,6315 \cos \theta - 2,5 \sin \theta ;$$

$$Q_{Px}^{(3)} = -\sin \varphi \cdot X_1 + Q_{Px}^{(3)} = -6,6315 \cos \theta - 12,5 \sin \theta .$$

$$N_{Px}^{(1)} = -\cos \varphi \cdot X_1 + N_{Px}^{(1)} = -X_1 \cos \varphi - (17,5 - 5x) \sin \varphi = \\ = -6,6315 \sin \theta - [17,5 - 5 \cdot 4(1 - \cos \theta)] \cos \theta = -6,6315 \sin \theta + 2,5 \cos \theta - 20 \cos^2 \theta ;$$

$$N_{Px}^{(2)} = -\cos \varphi \cdot X_1 + N_{Px}^{(2)} = -6,6315 \sin \theta + 2,5 \cos \theta ;$$

$$N_{Px}^{(3)} = -\cos \varphi \cdot X_1 + N_{Px}^{(3)} = -6,6315 \sin \theta + 12,5 \cos \theta .$$

Эпюры поперечных и продольных сил, построенные согласно представленным зависимостям, показаны на рис. 5.

Выполним деформационную проверку:

$$\sum_{i=1}^3 \int \frac{\bar{M}_1 M^{(i)} ds}{EJ} = 0 ; \quad -\frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^3 \int y M^{(i)} ds = 0 ; \quad -\frac{r^2}{EJ} \sum_{i=1}^3 \int \sin \theta M^{(i)} d\theta = 0 ;$$

множитель $(-r^2/EJ)$ далее опустим, как неравный нулю;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (30 - 26,526 \sin \theta + 10 \cos \theta - 40 \cos^2 \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin \theta (30 - 26,526 \sin \theta + 10 \cos \theta) d\theta + \\ + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin \theta (50 - 26,526 \sin \theta + 50 \cos \theta) d\theta = \left[-30 \cos \theta - 26,526 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) - \right. \\ \left. - 10 \frac{\cos^2 \theta}{2} + 40 \frac{\cos^3 \theta}{3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-30 \cos \theta - 26,526 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) - 10 \frac{\cos^2 \theta}{2} \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} + \\ + \left[-50 \cos \theta - 26,526 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) - 50 \frac{\cos^2 \theta}{2} \right] \Big|_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} = \\ = \left[-30(0 - 1) - 26,526 \left(\frac{1}{4} \pi - 0 - 0 \right) - 5(0 - 1) + 13,333(0 - 1) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[-30(-0,5 - 0) - 26,526 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0,866 + 0 \right) - 5 \cdot (-0,5)^2 \right] + \\
 & + \left[-50(-1 + 0,5) - 26,526 \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0,866 \right) - 25(1^2 - 0,5^2) \right] = \\
 & = 0,833 + 1,063 - 1,896 = 0.
 \end{aligned}$$

Деформационная проверка выполняется.

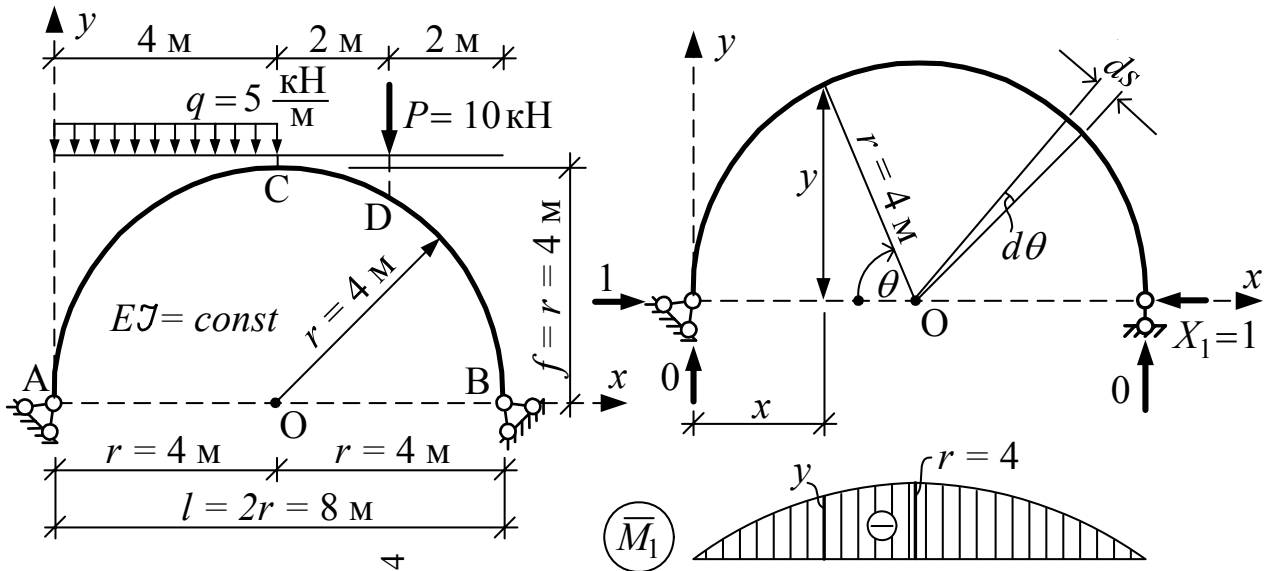


Рис. 6

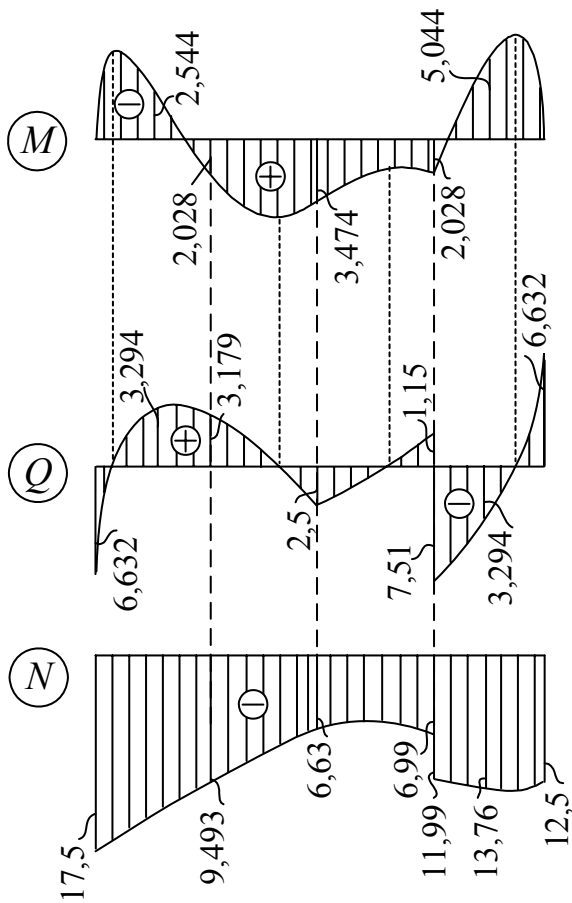


Рис. 5

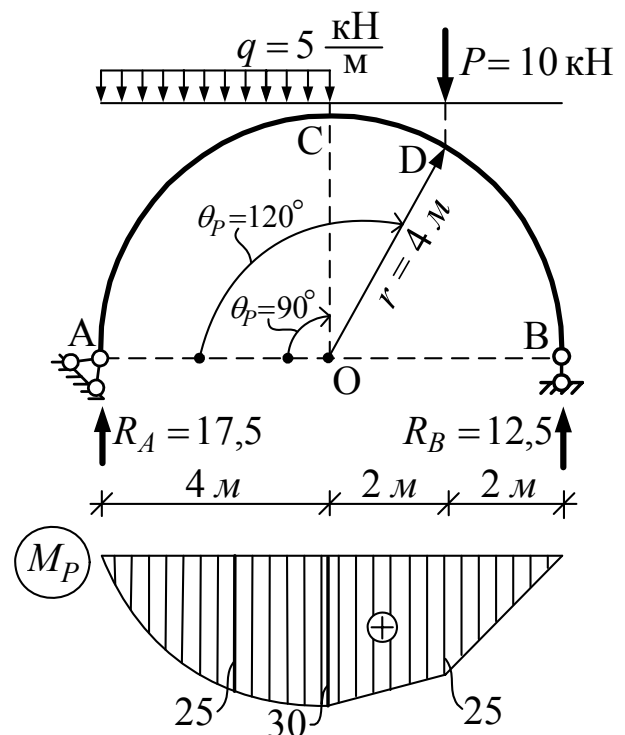


Рис. 7

4. Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования

При вычислении перемещений δ_{11} и Δ_{1P} по формулам Мора приближенным способом, то есть при замене интегрирования численным суммированием (2) пролет арки необходимо разбить на части (участки) относительно малой длины, равные либо неравные между собой. Число этих частей n определяет точность (чем на большее число частей разбить пролет, тем точность расчета будет выше) и трудоемкость (чем больше участков, тем больше объем вычислений) расчета. Удобнее разбивать пролет на равные части, что позволяет вынести их длины $\Delta x = l/n$ за знаки сумм (так далее и будем поступать). Выражения для перемещений δ_{11} (8) и Δ_{1P} (9) в этом случае принимают вид

$$\delta_{11} = \left(\sum_1^n \frac{y^2}{EJ \cos \varphi} \right) \Delta x + \left(\sum_1^n \eta \frac{\sin^2 \varphi}{GA \cos \varphi} \right) \Delta x + \left(\sum_1^n \frac{\cos \varphi}{EA} \right) \Delta x + \frac{l}{EA_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}}; \quad (22)$$

$$\Delta_{1P} = - \left(\sum_1^n \frac{y M_P}{EJ \cos \varphi} \right) \Delta x - \left(\sum_1^n \eta \frac{\sin \varphi Q_P}{GA \cos \varphi} \right) \Delta x - \left(\sum_1^n \frac{N_P}{EA} \right) \Delta x, \quad (23)$$

где все величины, входящие в суммы, здесь должны вычисляться согласно (2) в средних точках участков Δx , на которые разбивается пролет арки.

Для арок постоянного сечения жесткости их будут константами и их также можно вынести за суммы. Если ввести при этом обозначения

$$k_G = \frac{GA}{EJ}; \quad k_N = \frac{EA}{EJ}; \quad k_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}} = \frac{EA_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}}{EJ}, \quad (24)$$

и учесть, что $l = \Delta x \cdot n$, то выражения (22) и (23) можно записать в виде

$$\delta_{11} = \frac{\Delta x}{EJ} \left(\sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n \cos \varphi + \frac{n}{k_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}} \right); \quad (25)$$

$$\Delta_{11} = - \frac{\Delta x}{EJ} \left(\sum_1^n \frac{y M_P}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin \varphi Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n N_P \right). \quad (26)$$

При учете только изгибающих моментов второе и третье слагаемые в представленных выражениях опускаются.

Неизвестное метода сил вычисляется по обычной формуле (10) $X_1 = - \Delta_{1P} / \delta_{11}$. Окончательные эпюры M , Q и N в арке рассчитываются по формулам (11). При этом все расчетные ординаты здесь также вычисляются в средних точках участков Δx .

Деформационная проверка (12) в рассматриваемом подходе выполняется согласно следующей формуле

$$\sum_1^n \frac{y M}{EJ \cos \varphi} + \sum_1^n \eta \frac{\sin \varphi Q_P}{GA \cos \varphi} + \sum_1^n \frac{N_P}{EA} - \frac{X_1 n}{EA_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}} = 0, \quad (27)$$

или при $EJ, EA, GA = Const$ и с учетом обозначений (24) по формуле

$$\sum_1^n \frac{y M}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin \varphi Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n N - \frac{X_1 n}{k_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}} = 0. \quad (28)$$

Здесь все входящие в суммы величины вычисляются также в средних точках участков Δx , а при неучете поперечных и продольных сил опускаются второе и третье слагаемые.

Пример. Выполним расчет двухшарнирной арки с затяжкой (2), представленной на рис. 9. Жесткость арки принята постоянной по длине стержня ($EJ = Const$), жесткость затяжки принята равной: $EA_{зам} = 5EJ$ ($k_{зам} = 5$). Ось стержня арки изменяется по параболическому закону

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} x(12-x) = 0,1111x(12-x). \quad (29)$$

Углы наклона касательных к оси арки в ее сечениях по отношению к оси x (и соответственно нормалей к оси арки по отношению к оси y) определяются для параболической арки выражениями

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12-2x) = 0,2222(6-x); \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (30)$$

Основную систему метода сил получим путем разрезания затяжки (рис. 8) Расчет будем выполнять без учета влияния на перемещения поперечных и продольных сил. В этом случае величины δ_{11} и Δ_{1P} будут вычисляться по формулам

$$\delta_{11} = \left(\sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{n}{k_{\zeta \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}} \right) \frac{\Delta x}{EJ}; \quad \Delta_{1P} = - \left(\sum_1^n \frac{y M_P}{\cos \varphi} \right) \frac{\Delta x}{EJ}; \quad (31)$$

Пролет разобьем на 12 частей ($n = 12$) равной длины – $\Delta x = l/12 = 1$ м.

Расчетные величины ($y, \sin \varphi, \cos \varphi, M_P$ и т.д.) необходимо вычислять в средних точках участков Δx , координаты которых можно определить по выражению

(32)

$$x_i = 0,5\Delta x + \Delta x (i-1). \quad (i = 1 \dots n)$$

Все расчеты при замене интегрирования численным суммированием более удобно выполнять в табличной форме (см. табл. 1). Кроме средних на участках Δx сечений (32) в таблицу включены также характерные точки (A, B, D, K), вычисление внутренних усилий в которых необходимо для более полного представления об эпюрах и законах изменения внутренних усилий в арке. При этом

значения в характерных точках не должны учитываться в расчетах величин, определяемых согласно формулам Мора путем численного суммирования (в таблице 1 соответствующие элементы отмечены прочерками и не определяются).

Значения величин y , $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, вычисленные для всех расчетных сечений арки по формулам (29), (30), представлены в столбцах 3, 4 и 5 табл. 1.

Для определения грузового перемещения Δ_{1P} необходимо в О.С. метода сил (рис. 8) построить грузовую эпюру изгибающих моментов M_P , которая в данном случае будет такой же, как «балочная» эпюра M , то есть эпюра в простой двухопорной балке, имеющей пролет, равный пролету арки, и загруженной той же внешней нагрузкой. Для ее построения вычислим **«балочные» опорные реакции:**

$$\Sigma M_A = 0; \quad (3 \cdot 3) \cdot 3,5 + \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot 3 + 18 \cdot 5 + (2 \cdot 2) \cdot 9 + 12 \cdot 10 - R_B \cdot 12 = 0;$$

$$R_B = 24,25 (\text{кН});$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -(3 \cdot 3) \cdot 8,5 - \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot 9 - 18 \cdot 7 - (2 \cdot 2) \cdot 3 - 12 \cdot 2 + R_A \cdot 12 = 0;$$

$$R_A = 23,25 (\text{кН});$$

проверка: $\Sigma Y = 0; \quad 24,25 + 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 - 18 - 2 \cdot 2 - 12 = 0; \quad 47,5 - 47,5 = 0,$

и «балочные» изгибающие моменты в расчетных сечениях О.С.:

а) в средних точках участков Δx :

$$\dot{I}_{D1}^{\ddot{e}\ddot{a}\ddot{a}} = 23,25 \cdot 0,5 = 11,625 (\text{кН}\cdot\text{м}); \quad \dot{I}_{D2}^{\ddot{e}\ddot{a}\ddot{a}} = 23,25 \cdot 1,5 = 34,875 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D3}^{\ddot{e}\ddot{a}\ddot{a}} = 23,25 \cdot 2,5 - (5,5 \cdot 0,5) \cdot 0,25 - \left(\frac{0,5 \cdot 0,5}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 57,396 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D4}^{\ddot{e}\ddot{a}\ddot{a}} = 23,25 \cdot 3,5 - (4,5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - \left(\frac{1,5 \cdot 1,5}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 75,188 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D5}^{\ddot{e}\ddot{a}\ddot{a}} = 23,25 \cdot 4,5 - (3,5 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 2,5 = 88,479 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D6}^{\ddot{e}\ddot{a}\ddot{a}} = 23,25 \cdot 5,5 - (3 \cdot 3) \cdot 2 - \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + 0,5\right) - 18 \cdot 0,5 = 89,625 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D7}^{\ddot{i}\ddot{d}\ddot{a}\ddot{a}} = 24,25 \cdot 5,5 - (2 \cdot 2) \cdot 2,5 - 12 \cdot 3,5 = 81,375 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D8}^{\ddot{i}\ddot{d}\ddot{a}\ddot{a}} = 24,25 \cdot 4,5 - (2 \cdot 2) \cdot 1,5 - 12 \cdot 2,5 = 73,125 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D9}^{\ddot{i}\ddot{d}\ddot{a}\ddot{a}} = 24,25 \cdot 3,5 - (2 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 12 \cdot 1,5 = 64,625 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D10}^{\ddot{i}\ddot{d}\ddot{a}\ddot{a}} = 24,25 \cdot 2,5 - (2 \cdot 0,5) \cdot 0,25 - 12 \cdot 0,5 = 54,375 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{D11}^{i\delta\delta\delta} = 24,25 \cdot 1,5 = 36,375 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

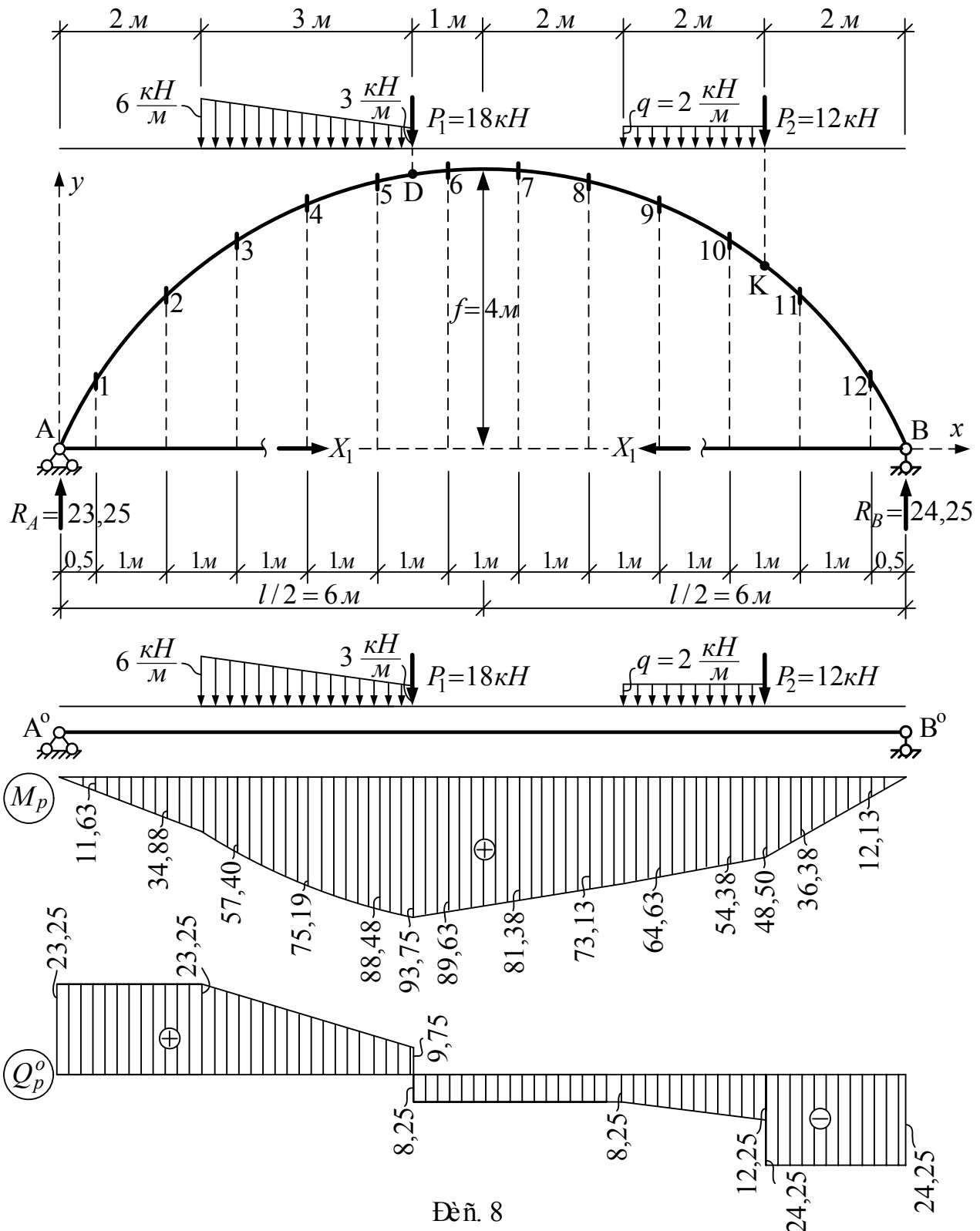
$$\dot{I}_{D12}^{i\delta\delta\delta} = 24,25 \cdot 0,5 = 12,125 (\text{кН}\cdot\text{м}).$$

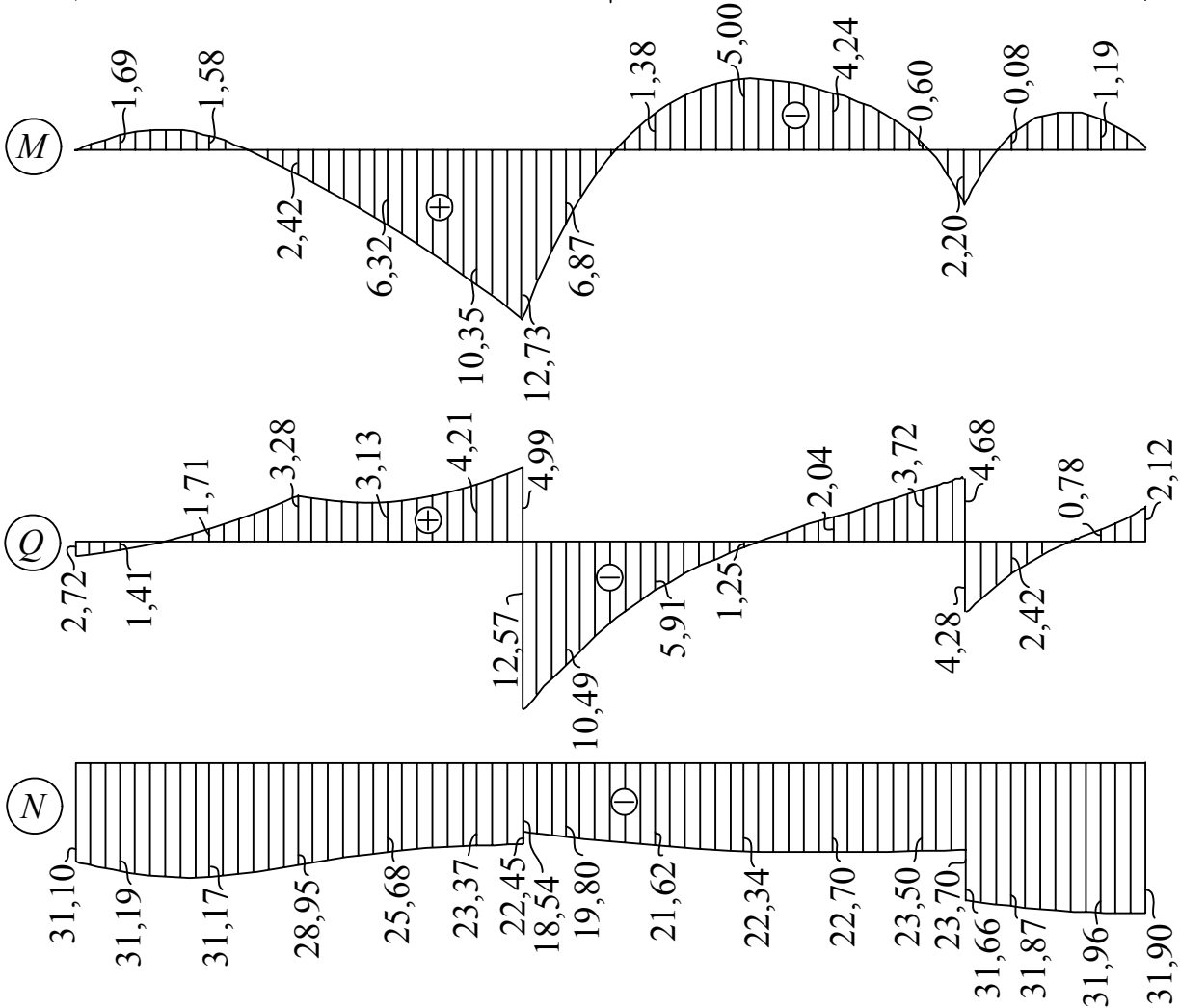
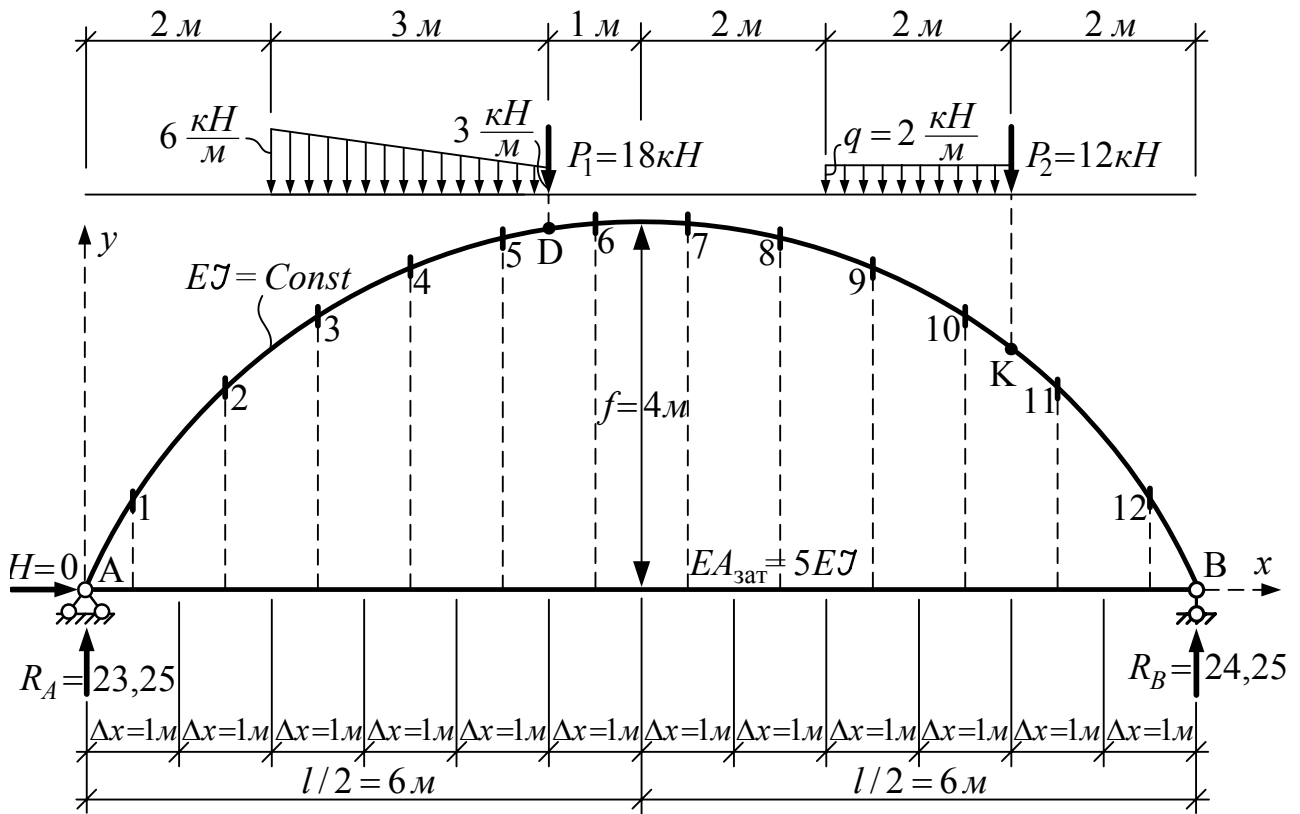
б) в характерных сечениях:

$$M_{PA} = 0; \quad \dot{I}_{DD}^{e\delta\delta} = 23,25 \cdot 5 - (3 \cdot 3) \cdot 1,5 - \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 3 = 93,75 (\text{кН}\cdot\text{м});$$

$$\dot{I}_{DE}^{i\delta\delta\delta} = 24,25 \cdot 2 = 48,5 (\text{кН}\cdot\text{м}); \quad \dot{I}_{DA} = 0.$$

Эпюра M_p в О.С. показана на рис. 8, и значения ее ординат в рассматриваемых сечениях записаны в 8-ом столбце табл. 1.





Дѣл. 9

Таблица расчета двухшарнирной арки

Таблица 1

№ то- чек	x, м	y, м	sin φ	cos φ	$\frac{y}{\cos \varphi}$	$\frac{y^2}{\cos \varphi}$	M _p , кН·м	$\frac{yM_p}{\cos \varphi}$	M= -yX ₁ + +M _p	$\frac{yM}{\cos \varphi}$	Q _p ⁰ , кН	Q, кН			N, кН		
												-X ₁ sinφ	Q _p ⁰ cosφ	Q	-X ₁ cosφ	-Q _p ⁰ sinφ	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	0	0,000	0,800	0,600	-	-	0	-	0	-	23,25	-16,666	13,95	-2,716	-12,500	-18,6	-31,100
1	0,5	0,639	0,774	0,633	1,0095	0,645	11,625	11,735	-1,685	-1,701	23,25	-16,125	14,717	-1,407	-13,187	-18,0	-31,187
2	1,5	1,750	0,707	0,707	2,4752	4,332	34,875	86,324	-1,584	-3,921	23,25	-14,729	16,438	1,709	-14,729	-16,438	-31,167
3	2,5	2,639	0,614	0,789	3,3447	8,827	57,396	191,975	2,418	8,088	20,375	-12,791	16,076	3,284	-16,437	-12,510	-28,947
4	3,5	3,306	0,486	0,874	3,7826	12,505	75,188	284,407	6,321	23,910	15,375	-10,125	13,438	3,313	-18,208	-7,472	-25,680
5	4,5	3,750	0,316	0,949	3,9515	14,818	88,479	349,627	10,353	40,910	11,375	-6,583	10,795	4,212	-19,771	-3,594	-23,365
D	5,0	3,889	0,217	0,976	-	-	93,750	-	12,730	-	9,75 -8,25	-4,521	9,516 -8,052	4,995 -12,573	-20,330	-2,116	-22,449 -18,543
6	5,5	3,972	0,110	0,994	3,9960	15,872	89,625	358,142	6,869	27,449	-8,25	-2,292	-8,201	-10,493	-20,708	+0,908	-19,800
7	6,5	3,972	-0,110	0,994	3,9960	15,872	81,375	325,175	-1,381	-5,518	-8,25	2,292	-8,201	-6,909	-20,708	-0,908	-21,616
8	7,5	3,750	-0,316	0,949	3,9515	14,818	73,125	288,953	-5,001	-19,761	-8,25	6,583	-7,829	-1,246	-19,771	-2,571	-22,342
9	8,5	3,306	-0,486	0,874	3,7826	12,505	64,625	244,451	-4,242	-16,046	-9,25	10,085	-8,085	2,040	-18,208	-4,496	-22,704
10	9,5	2,639	-0,614	0,789	3,3447	8,827	54,375	181,868	-0,603	-2,017	-11,5	12,791	-9,074	3,718	-16,437	-7,061	-23,498
K	10,0	2,222	-0,664	0,747	-	-	48,500	-	2,203	-	-12,25 -24,25	13,833	-9,151 -18,115	4,682 -4,282	-15,562	-8,134 -16,102	-23,700 -31,664
11	10,5	1,750	-0,707	0,707	2,4752	4,332	36,375	90,035	-0,084	-0,208	-24,25	14,729	-17,145	-2,416	-14,729	-17,145	-31,873
12	11,5	0,639	-0,774	0,633	1,0095	0,645	12,125	12,240	-1,185	-1,196	-24,25	16,125	-15,350	0,775	-13,187	-18,770	-31,957
B	12,0	0	-0,800	0,600	-	-	0	-	0	-	-24,25	16,666	-14,55	2,116	-12,500	-19,4	-31,900
Σ					$\Sigma \frac{y^2}{\cos \varphi} =$ = 113,998	$\Sigma \frac{y^2 D}{\cos \varphi} =$ = 2424,932	$\Sigma \frac{yI}{\cos \varphi} =$ +50,368 -100,359	$X_1 = 20,833$									

Вычислив теперь значения величин $\frac{y^2}{\cos \varphi}$ и $\frac{y \dot{I}_D}{\cos \varphi}$ в средних точках участков Δx (см. столбцы 7 и 9 табл. 1), просуммировав их по всем этим точкам и подставив полученные суммы в выражения (31), найдем δ_{11} и Δ_{1D} :

$$\delta_{11} = \left(113,998 + \frac{12}{5} \right) \frac{1}{EJ} = \frac{116,398}{EJ}; \quad \Delta_{1D} = -(2424,932) \frac{1}{EJ} = -\frac{2424,932}{EJ}.$$

Неизвестное метода сил (продольное усилие в затяжке) определяется из решения канонического уравнения метода сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-2424,932}{116,398} = 20,833 \text{ (кН)}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в арке строится по формуле

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -y X_1 + M_P = -y X_1 + M_P^0 \quad (33)$$

и представлена на рис. 9, а вычисление ее ординат в расчетных сечениях выполнено в таблице 1 (10-ый столбец).

Вычисление ординат окончательных эпюр поперечных и продольных сил выполняется по формулам

$$\begin{aligned} Q &= \bar{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin \varphi X_1 + Q_P^0 \cos \varphi; \\ N &= \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos \varphi X_1 - Q_P^0 \sin \varphi; \end{aligned} \quad (34)$$

где Q_P^0 – «балочная» эпюра поперечных сил, то есть эпюра поперечных сил в простой двухопорной балке, имеющей пролет, равный пролету арки, и загруженной той же внешней нагрузкой (рис. 8).

Вычисление ординат «балочной» эпюры Q_P^0 :

а) в средних точках участков Δx :

$$Q_{P1}^0 = Q_{P2}^0 = 23,25 \text{ (кН)}; \quad Q_{P3}^0 = 23,25 - 5,5 \cdot 0,5 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{2} = 20,375 \text{ (кН)};$$

$$Q_{P4}^0 = 23,25 - 4,5 \cdot 1,5 - \frac{1,5 \cdot 1,5}{2} = 15,375 \text{ (кН)};$$

$$Q_{D5}^0 = 23,25 - 3,5 \cdot 2,5 - \frac{2,5 \cdot 2,5}{2} = 11,375 \text{ (кН)}; \quad Q_{D6}^0 = 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 - 18 = -8,25 \text{ (кН)};$$

$$Q_{D7}^0 = Q_{P8}^0 = -24,25 + 2 \cdot 2 + 12 = -8,25 \text{ (кН)}; \quad Q_{D9}^0 = -24,25 + 2 \cdot 1,5 + 12 = -9,25 \text{ (кН)};$$

$$Q_{D10}^0 = -24,5 + 2 \cdot 0,5 + 12 = -11,5 \text{ (кН)}; \quad Q_{D11}^0 = Q_{P12}^0 = -24,25 \text{ (кН)}.$$

б) в характерных сечениях:

$$Q_{D\dot{A}}^0 = -23,25 \text{ (кН)}; \quad Q_{DD}^{0\ddot{A}\dot{A}} = 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 = 9,75 \text{ (кН)};$$

$$Q_{DD}^{0i\dot{d}\dot{a}\dot{a}} = 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 - 18 = -8,25 \text{ (кН)};$$

$$Q_{DE}^{0\ddot{e}\dot{a}\dot{a}} = -24,25 + 12 = -12,25 \text{ (кН)}; \quad Q_{DE}^{0i\dot{d}\dot{a}\dot{a}} = -24,25 \text{ (кН)}.$$

Вычисление ординат окончательных эпюр Q и N в арке выполнено в столбцах 13 ÷ 18 табл. 1., а сами эпюры представлены на рис. 9.

5. Расчет двухшарнирной арки на ПЭВМ с использованием программы “Arka2”

На кафедре строительной механики Брестского государственного технического университета для расчета двухшарнирных арок составлена учебная компьютерная программа для ПЭВМ¹ “Arka2”, в которой расчет выполняется с использованием способа численного суммирования (см. раздел 4). Программа реализована в среде программирования Delphi 1, работает под управлением операционных систем Windows 3.*, Windows 95 и выше, и не требует специальной установки на компьютер и дополнительных библиотек. Программа имеет удобный интерфейс, графическое и табличное представление исходных данных и результатов расчета.

Программа “Arka2” является учебной программой и при ее использовании предусмотрено выполнение определенных этапов расчета двухшарнирной арки,

несущих в себе основную суть метода, вручную, чтобы студент показал знание и понимание метода расчета. Другая часть расчета, более трудоемкая, содержащая большой объем вычислений, передается программе и ПЭВМ.

Вручную предлагается выполнить вычисление для одного (заданного – x_k) сечения арки следующих величин:

- 1) геометрических характеристик – y_k , $\sin \varphi_k$, $\cos \varphi_k$;
- 2) ординаты единичной эпюры \bar{M}_{1K} ;
- 3) ординат грузовых эпюр M_{PK} , Q_{PK} , N_{PK} ;

после ввода полученных значений для сечения x_k и их проверки программа вычисляет величины y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, M_P , Q_P , N_P , во всех расчетных сечениях, определяет коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1P} канонического уравнения и неизвестное метода сил X_1 , после чего вручную необходимо еще вычислить:

- 4) ординаты окончательных эпюр M , Q , N в заданном сечении x_k .

¹ Программа составлена В.И. Игнатюком и Н.С. Бондаруком.

После ввода и проверки этих значений программа выполняет полный расчет арки с представлением всех расчетных величин и эпюр усилий; при этом появляется также возможность получить величины внутренних усилий в любом интересующем нас сечении арки.

Заметим, что контроль указанных величин в заданном сечении программа производит только при наличии в нагрузке горизонтальных сил. Расчет арки, на которую не действуют горизонтальные нагрузки, будет проходить без контроля. И это позволяет выполнять исследование влияния на напряженно-деформированное состояние арки ряда факторов и характеристик:

- законов изменения оси арки (кругового, параболического, синусоидального, катеноидального, эллиптического, гиперболического);
- относительного подъема арок (f/l), характеризующего пологость (крутизну) арок;
- учета-неучета различных видов деформаций (изгибной, продольной, поперечной);
- числа участков разбивки арок.

Задание и ввод исходных данных в программе “Arka2” осуществляется в основном окне программы (рис. 10), в котором справа имеется три закладки, позволяющие ввести все необходимые величины.

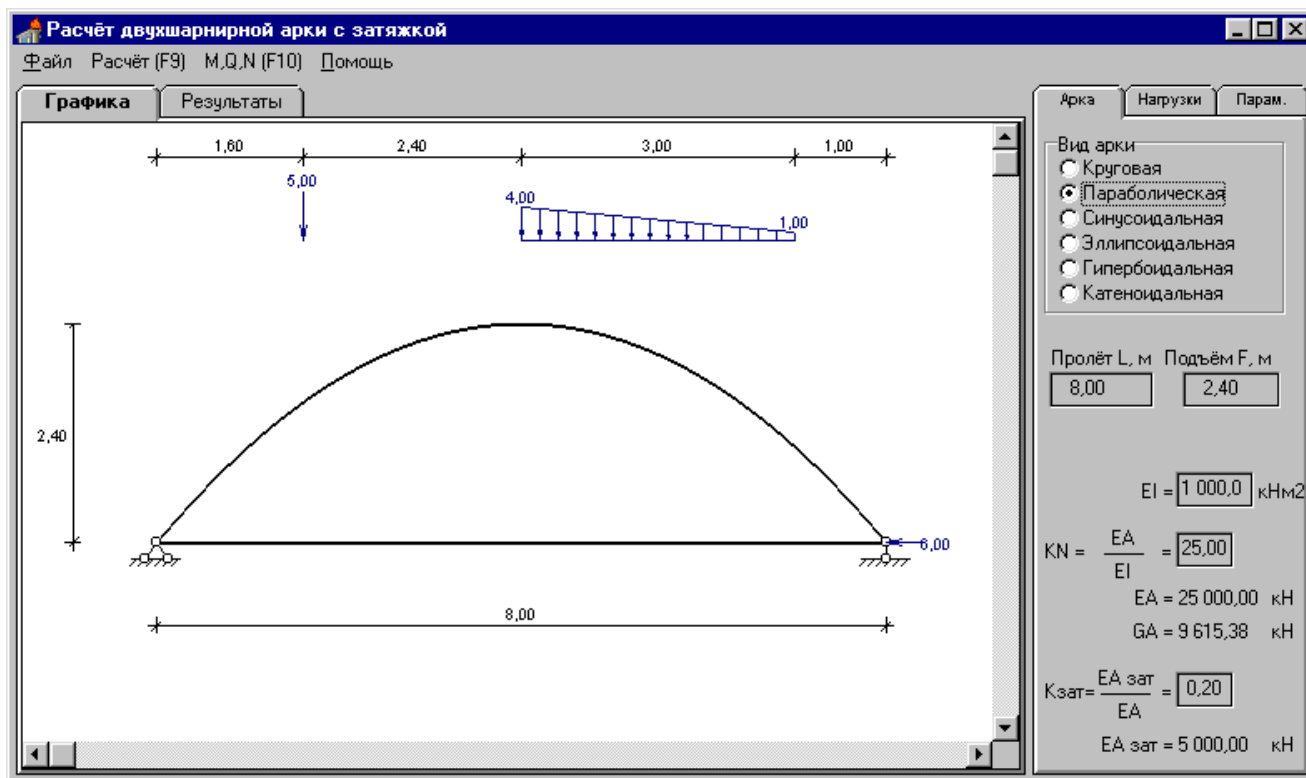


Рис. 10. Основное окно программы “Arka2”

На закладке “**Арка**” вводятся размеры арки (l, f), задается вид оси арки и соотношения ее жесткостей (рис. 10).

На закладке “**Нагрузки**” (рис. 13) производится ввод (добавление), корректировка (редактирование) и удаление внешних нагрузок (сосредоточенных сил и моментов, распределенных нагрузок). При вызове добавления или редактирования нагрузки появляется окно “Нагрузка” (рис. 11), в котором вводятся величины и координаты новой нагрузки или изменяются параметры имеющейся выделенной нагрузки.

The image shows a dialog box titled "Нагрузка" (Load) with a close button (X) in the top right corner. It features three tabs: "Сосредоточенная" (Concentrated), "Распределённая" (Distributed), and "Момент" (Moment). The "Распределённая" tab is selected. Inside the dialog, there are four input fields: "q1y = 4.00 кН", "q2y = 1.00 кН", "x1 = 4.00 м", and "x2 = 7.00 м". Below these fields is a text area labeled "Примечание" (Note) containing the text "по трапецидальному закону" (according to the trapezoidal law). At the bottom, there are two buttons: "OK" with a green checkmark icon and "Cancel" with a red X icon.

Рис. 11. Панель ввода нагрузок

Закладка “**Параметры**” (рис. 14) позволяет задать число участков разбиения пролета арки, какие усилия ($M, Q, N, N_{зам}$) и соответственно деформации учитывать в формулах Мора при вычислениях перемещений δ_{11} , Δ_{1P} и какие эпюры представлять (рисовать) в окне графики по результатам расчета.

Программа имеет **меню**, включающее:

- базовые команды работы с программой и файлами – “**Файл**” (Открыть, Сохранить, Печать в файл, Печать на принтер, Выход);
- “**Помощь**” (Справка, О программе), в которой изложены и объяснены основы используемого метода расчета и работы с программой;
- команду “**Расчет**”, которая запускает программу на счет;
- команду “**М, Q, N**”, которая после полного расчета арки открывает окно для вычисления внутренних усилий в любом заданном сечении арки (рис. 15).

Пример расчета двухшарнирной арки по программе “Arka2”. Рассмотрим арку, изображенную в окне программы на рис. 10. Ввод исходных данных выполняется на указанных выше закладках “Арка”, “Нагрузки”, “Параметры”. Расчет выполним с учетом только изгибных деформаций в арке и продольных деформаций в затяжке, что задается на закладке “Параметры” в разделе “Что учитывать” путем установки “галочек” в окошках M и $N_{зам}$ (см. рис. 14).

После задания и ввода исходных данных и условий расчета программа может быть запущена на счет, в результате чего, учитывая, что в нагрузках имеется горизонтальная сила $F_P = 6(\text{кН})$, появится панель “Контрольные величины” (рис. 12). В окошки этой панели необходимо последовательно ввести:

- ординату заданного сечения x_K
- и вычисленные для него вручную величины \bar{M}_{1K} , M_{PK} , Q_{PK} и N_{PK} .

Выполним расчет контрольных величин для сечения $x_K = 5$ м:

а) геометрические характеристики:

$$y_K = \frac{4f}{l^2} x_K (l - x_K) = \frac{4 \cdot 2,4}{8^2} 5(8 - 5) = 2,25(\text{м});$$

$$\text{tg } \varphi_K = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_K) = \frac{4 \cdot 2,4}{8^2} (8 - 2 \cdot 5) = -0,3; \quad \varphi_K = -16,699^\circ;$$

$$\sin \varphi_K = -0,2873; \quad \cos \varphi_K = 0,9578;$$

б) опорные реакции в основной системе:

$$\sum X = 0; \quad H_A - 6 = 0; \quad H_A = 6(\text{кН});$$

$$\sum M_B = 0; \quad -5 \cdot 6,4 - (1 \cdot 3) \cdot 2,5 - \left(\frac{1}{2} 3 \cdot 3\right) \cdot 3 + R_A \cdot 8 = 0; \quad R_A = 6,625(\text{кН});$$

$$\sum M_A = 0; \quad 5 \cdot 1,6 + (1 \cdot 3) \cdot 5,5 + \left(\frac{1}{2} 3 \cdot 3\right) \cdot 5 - R_B \cdot 8 = 0; \quad R_B = 5,875(\text{кН});$$

проверка: $\sum Y = 0; \quad 6,625 + 5,875 - 5 - \frac{4+1}{2} \cdot 3 = 12,5 - 12,5 = 0;$

в) усилия в сечении x_K основной системы метода сил:

$$\bar{M}_{1K} = -y = -2,25; \quad \bar{Q}_{1K} = -\sin \varphi_K = 0,2873; \quad \bar{N}_{1K} = -\cos \varphi_K = -0,9578;$$

$$M_{PK} = M_{PK}^0 - F_P y_K = \left[6,625 \cdot 5 - 5 \cdot 3,4 - (3 \cdot 1) \cdot 0,5 - \left(\frac{1}{2} 1 \cdot 1\right) \frac{2}{3} 1 \right] - 6 \cdot 2,25 = 0,792(\text{кНм}),$$

где F_P – горизонтальная сила, действующая на арку на уровне правой опоры и равная горизонтальной реакции в левой опоре (рис. 10);

Введите	Значение	Кнопка
Введите X сеч =	5,000	Ok
Введите M1 сеч =	-2,250	Ok
Введите Mr сеч =	0,792	Ok
Введите Qr сеч =	-0,072	Ok
Введите Nr сеч =	-6,286	Ok
X1 =	0,088	
Введите M сеч =	0,595	Ok
Введите Q сеч =	-0,047	Ok
Введите N сеч =	-6,370	Ok

Рис. 12. Панель ввода
контрольных
величин

$$Q_{PK} = Q_{PK}^0 \cos \varphi_K - F_P \sin \varphi_K = \left(6,625 - 5 - \frac{4+3}{2} \cdot 1 \right) \cdot 0,9578 - 6 \cdot (-0,2873) = -0,072(\text{кН});$$

$$N_{PK} = - \left[Q_{PK}^0 \sin \varphi_K + F_P \cos \varphi_K \right] = - \left[\left(6,625 - 5 - \frac{4+3}{2} \cdot 1 \right) \cdot (-0,2873) + 6 \cdot 0,9578 \right] = -6,286(\text{кН}).$$

Если эти величины определены верно, то программа выполнит расчет усилий в О.С. в остальных сечениях, вычислит перемещения δ_{11} , Δ_{1P} и неизвестное метода сил X_1 , значение которого отобразится на панели (рис. 12). В противном случае программа выдаст сообщение о том, что введенная контрольная величина вычислена неверно. В этом случае необходимо выполнить ее перерасчет и затем вести заново. Получив значение X_1 , нужно вручную вычислить еще для сечения x_k ординаты окончательных эпюр M , Q и N :

$$M_k = \bar{M}_{1k} X_1 + M_{PK} = -2,25 \cdot 0,088 + 0,792 = 0,595(\text{кНм});$$

$$Q_k = \bar{Q}_{1k} X_1 + Q_{PK} = 0,2873 \cdot 0,088 - 0,072 = -0,047(\text{кН});$$

$$N_k = \bar{N}_{1k} X_1 + N_{PK} = -0,9578 \cdot 0,088 - 6,286 = -6,370(\text{кН})$$

и ввести их в окошки панели “Контрольные величины”(рис. 12). По результатам ввода каждой ординаты последовательно выполняется проверка правильности их вычисления, после прохождения которой программа выполнит полный расчет системы.

X, м	Y, м	Sin	Cos	M1, кНм	Q1, кН	N1, кН	N1зат, к	Mr, кНм	Qr, кН	Nr, кН	M, кНм	Q, кН	N, кН
0,000	0,000	0,768	0,640	0,000	-0,768	-0,640	1,000	0,000	-0,368	-8,931	0,000	-0,435	-8,987
0,333	0,383	0,740	0,673	-0,383	-0,740	-0,673	1,000	-0,092	0,017	-8,938	-0,125	-0,048	-8,997
1,000	1,050	0,669	0,743	-1,050	-0,669	-0,743	1,000	0,325	0,911	-8,892	0,233	0,852	-8,957
1,667	1,583	0,573	0,819	-1,583	-0,573	-0,819	1,000	1,208	-2,110	-5,847	1,070	-2,160	-5,919
2,333	1,983	0,447	0,894	-1,983	-0,447	-0,894	1,000	-0,108	-1,230	-6,093	-0,282	-1,269	-6,172
3,000	2,250	0,287	0,958	-2,250	-0,287	-0,958	1,000	-0,625	-0,168	-6,214	-0,822	-0,193	-6,298
3,667	2,383	0,100	0,995	-2,383	-0,100	-0,995	1,000	-0,342	1,020	-6,132	-0,550	1,011	-6,219
4,333	2,383	-0,100	0,995	-2,383	0,100	-0,995	1,000	0,526	0,943	-5,936	0,317	0,951	-6,023
5,000	2,250	-0,287	0,958	-2,250	0,287	-0,958	1,000	0,792	-0,072	-6,286	0,595	-0,047	-6,370
5,667	1,983	-0,447	0,894	-1,983	0,447	-0,894	1,000	0,524	-0,584	-7,000	0,351	-0,545	-7,078
6,333	1,583	-0,573	0,819	-1,583	0,573	-0,819	1,000	0,020	-0,644	-7,775	-0,119	-0,594	-7,846
7,000	1,050	-0,669	0,743	-1,050	0,669	-0,743	1,000	-0,425	-0,353	-8,390	-0,517	-0,294	-8,455
7,667	0,383	-0,740	0,673	-0,383	0,740	-0,673	1,000	-0,342	0,488	-8,383	-0,375	0,552	-8,442
8,000	0,000	-0,768	0,640	0,000	0,768	-0,640	1,000	0,000	0,848	-8,354	0,000	0,916	-8,410
1,600	1,536	0,584	0,812	-1,536	-0,584	-0,812	1,000	1,384	1,871	-8,740	1,249	1,819	-8,811
1,600	1,536	0,584	0,812	-1,536	-0,584	-0,812	1,000	1,384	-2,187	-5,819	1,249	-2,238	-5,890
8,000	0,000	-0,768	0,640	0,000	0,768	-0,640	1,000	0,000	0,848	-8,354	0,000	0,916	-8,410
8,000	0,000	-0,768	0,640	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Тип	Знач.	X, м
Р кН	5,00	1,6
q кН/м	4,00.. 1,00	4,0.. 7,0
Р кН	6,00	8,0

Рис. 13. Окно табличных результатов расчета арки

Результаты расчета арки представляются как в табличном виде (в виде таблицы с ординатами геометрических характеристик и внутренних усилий во всех расчетных сечениях, включая характерные – под сосредоточенными нагрузками и на опорах) (см. рис. 13), так и в графическом виде (в виде соответствующих эпюр внутренних усилий в арке) (см. рис. 14).

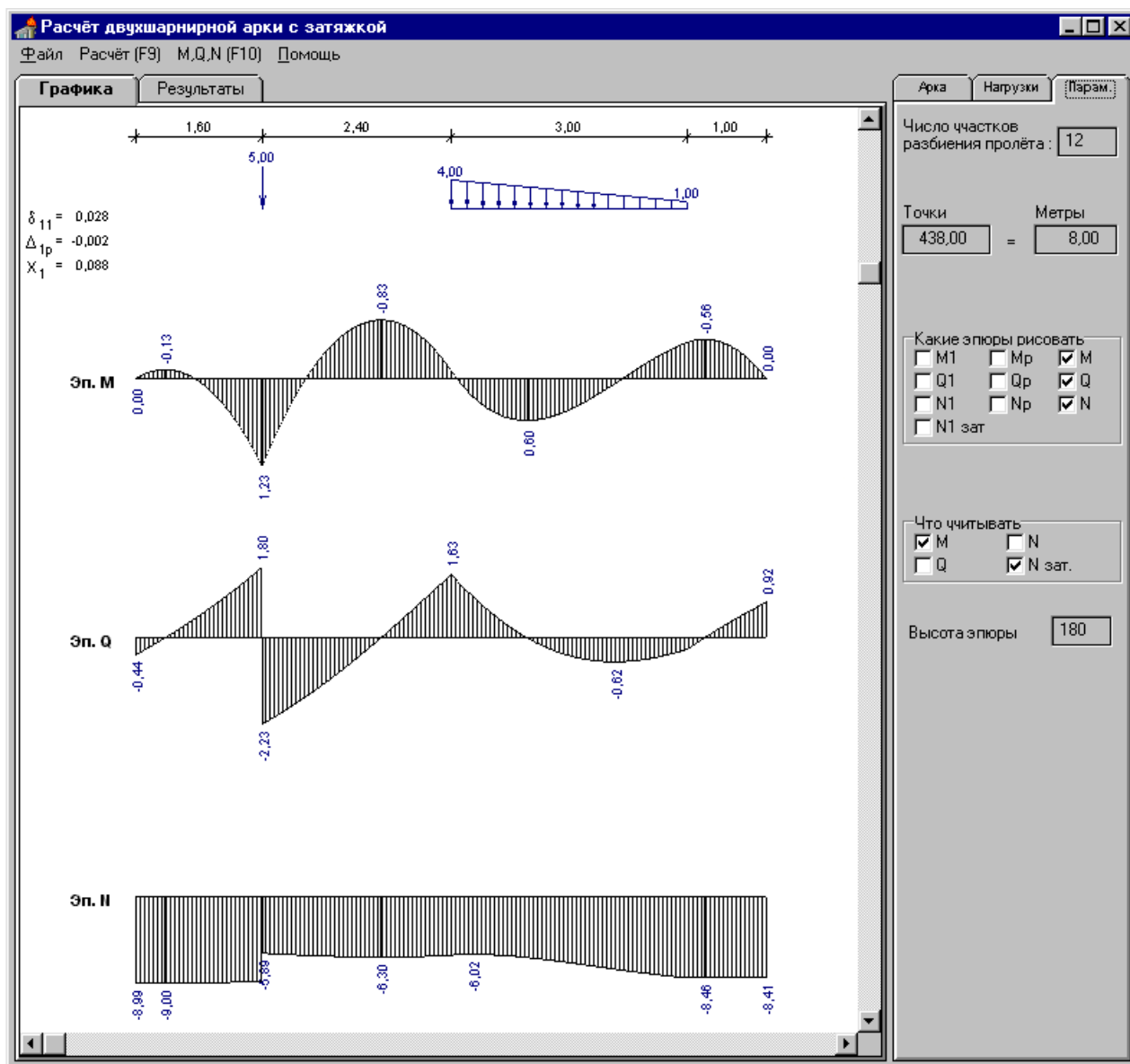
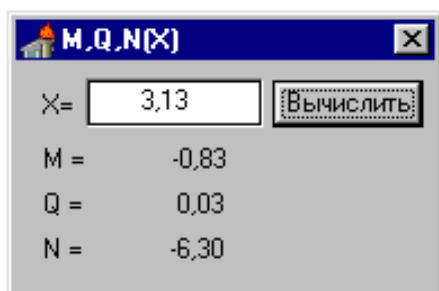


Рис. 14. Окно графических результатов расчета арки

После выполнения расчета арки в программе имеется возможность получить внутренние усилия в любом сечении арки. Для этого служит команда “M,Q,N”, при вызове которой открывается вспомогательное окно (рис.15), в



которое необходимо ввести ординату сечения, и нажать кнопку “Вычислить”.

Рис. 15. Окно вычисления внутренних усилий в любом заданном сечении арки.

ЛИТЕРАТУРА, рекомендуемая к использованию при изучении материала

1. Строительная механика / Под ред. А.В. Даркова. – М.: Высшая школа, 1976.– 600 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс.– М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
3. Довнар Е.П., Коршун Л.И. Строительная механика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989. – 310 с.
4. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем / Под ред. Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1980. – 384 с.
5. Ржаницин А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.
6. Снитко Н. К. Строительная механика.– М.: Высшая школа, 1980.– 432 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие понятия и подходы к расчету	3
2. Принципы расчета двухшарнирных арок методом сил	5
3. Расчет двухшарнирной арки с использованием непосредственного интегрирования....	9
4. Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования	14
5. Расчет двухшарнирной арки на ПЭВМ с использованием программы «Arka2»	21
Литература, рекомендуемая к использованию при изучении материала.....	27

Учебное издание

Составитель: Игнатюк Валерий Иванович

РАСЧЕТ ДВУХШАРНИРНЫХ АРОК НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

Методические указания
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов специальности 70 02 01
«Промышленное и гражданское строительство»

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Технический редактор Никитчик А.Д.

Корректор Никитчик Е.В.

Подписано к печати 20.02.2003 г. Формат 60×84/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 100 экз. Заказ № . Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул Московская, 267.